الأستاذ بن شعبانة عبد الحكيم
مجموعة ابن البناء المراكشي

مبرهنة كنتور

من أجل كل مجموعتين غير خاليتين

$$A , B$$

إذا وجد تباين من الأولى نحو الثانية و وجد تباين من الثانية نحو الأولى **فيوجد تطبيق تقابلي بينهما**

سميت هذه المبرهنة بمبرهنة كنتور برنشتاين ذلك أن كنتور أعطى برهانا يستعمل مسلمة الاختيار ثم قام برنشتاين بإعطاء برهان آخر لا يستعملها.

سنقدم برهانين لها

البرهان الأول

عن طريق التوطئة التالية :

توطئة

لنعتبر مجموعة E ومجموعة أجزائها ولنفرض أنه لدينا نطبيق g من مجموعة الأجزاء نحو نفسها بحيث هذا التطبيق متزايد :

$$g : P(E) \to P(E)$$

التطبيق المتزايد بمفهوم المجموعات هو التطبيق الذي يحقق

$$A \subset B \Rightarrow g(A) \subset g(B)$$

إذا حقق التطبيق ذلك **فهو يقبل نقطة صامدة** أي توجد مجموعة بحيث

$$g(M) = M$$

برهان التوطئة
لنعرف المجموعة التالية

$$X = \{A \in P(E) : A \subset g(A)\}$$

بما أن المجموعة الخالية تحقق

$$\emptyset \subset g(\emptyset)$$

فهي تنتمي ل X إذن X غير خالية.

لنصنع اتحاد مجموعات X فنضع

$$C = \bigcup M \, , M \in X$$

بما أن

$$\forall M \in X : M \subset g(M)$$

فنستنتج أن

$$\bigcup M \subset \bigcup g(M) \quad ... (1)$$

لكن كون g متزايدة نستنتج منه أن

$$M \subset C \Rightarrow g(M) \subset g(C)$$

ومنه

$$\bigcup g(M) \subset g(C) \; ... \; (2)$$

من 1 و 2 نستنتج

$$C \subset g(C) \; ... \; (3)$$

إذن C تنتمي ل X

نطبق كون g متزايدة فيكون لدينا

$$C \subset g(C) \Rightarrow g(C) \subset g(g(C))$$

لكن هذا يعني أنه

$$g(C) \in X$$

إذن هي محتوات في C لأنها اتحاد مجموعات X

$$g(C) \subset C \; ... \; (4)$$

إذن من 3 و 4 نجد نقطتنا الصامدة

$$g(C) = C$$

برهان مبرهنة كنتور - برنشتاين

لنفرض أنه لدينا تباين f من A نحو B وتباين h من B نحو A.

نحن نعلم أن f يصبح تقابلي إذا جعلناه من A نحو f(A)

وعموما يصبح تقابلي من مجموعة E نحو f(E)

ونفس الشيء يقال على h

الفكرة هي أن نقصر f على مجموعة E بحيث تتمة E في A أي A\E هي صورة كذلك للجزء المتمم من B بواسطة h أي

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

عندها يكون f تقابلي من E نحو صورة E و h تقابلي من تتمة صورة E ب f نحو تتمة E في A.

فيمكننا أن نعرف تطبيق تقابلي k كالتالي:

$$k(x) = f(x) , x \in E$$

$$k(x) = h^{-1}(x) : x \in A \setminus E$$

إذن نحتاج أن يكون h تقابلا بين **B\f(E)** و **A\E** حتى نستطيع استعمال h^-1

أي نحتاج

$$h(B \setminus f(E)) = A \setminus E$$

كي نكمل به ما تبقى من الصور التي لا يغطيها f.

المساواة السابقة تعني أن

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

لكن هذا يعرف تطبيق على مجموعات أجزاء المجموعة A أي من أجل كل مجموعة M لدينا

$$g(M) = A \setminus h(B \setminus f(M))$$

وهذا التطبيق بتعريفه متزايد فهو يقبل نقطة صامدة إذن توجد مجموعة E يحقق عندها g(E) = E أي

$$A \setminus h(B \setminus f(E)) = E$$

وهو المطلوب لكي نعرف التطبيق التقابلي k.

البرهان الثاني

سنبدأ أولا بهذه التوطئة

توطئة

إذا وجد تباين من مجموعة نحو جزء منها فيوجد بينهما تقابل.

لتكن مجموعة A وتباين u نحو جزء منها B

ولنأخذ متتالية المجموعات المعرفة بالتراجع التالية

$$C(0) = A\backslash B$$
$$C(n) = U(C(n-1)) , n > 0$$

وليكن C اتحادها، نلاحظ من تعريف C أن

$$u(C) \subset C$$

نعرف الآن التطبيق v بأنه مطابق ل u على C وحيادي على متممة C أي :

$$v(x) = u(x) : x \in C$$
$$v(x) = x : \; c \notin C$$

هذا التطبيق ينقل القيم من A نحو B لأن القسم الأول من تعريفه معرف ب u الذي صوره في B.

والقسم الثاني ينقل x لا تنتمي ل C نحو x لكن كون x لا تنتمي ل C يعنى أنها لا تنتمي ل C(0) لأن C هي اتحادات Cn و بما أن **C(0) = A\B** فهذا يعني أن x لا تنتمي ل A\B أي تنتمي ل B.

التطبيق v متباين من تعريفه ذلك أن القسم الأول

$$v(x) = u(x) : x \in C$$

متباين لتباين u

والقسم الثاني كذلك

$$v(x) = x : \; c \notin C$$

وهما قسمان لا يلتقيان لأن $v(C) = u(C) \subset C$

سنبرهن الآن أنه غمر من A نحو B

ليكن y من B فإذا كان لا ينتمي ل C فلدينا

$$v(y) = y$$

أما إذا كان ينتمي ل C فهو ينتمي لأحد مجموعات اتحادها أي C(n) لكنه لا ينتمي ل C(0) لأن مجموعة وصولنا هي B و C(0) هي A\B

إذن سنتمي لأحد مجموعات الاتحاد الأخرى

$$C(n) = u(C(n-1))، n > 0$$

ومنه يوجد x في C(n-1) بحيث

$$v(x) = u(x) = y$$

إذن تطبيقنا غامر ومتباين فهو تقابل من A نحو B.

برهان مبرهنة كانتور برنشتاين

إذا كان عندنا تباين f من E نحو F وتباين g من f نحو E فنحن نعلم أن g تقابل بين F و g(F) ولدينا

$$u = gof$$

تباين من E نحو g(F)

ومنه حسب التوطئة يوجد تقابل h بين E و g(F) وبما أن g هو تقابل بين F و g(F) فقد برهنا المطلوب بالتطبيق:

$$goh^{-1}$$